

(30)

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ:

δ: Συνεχής περίπτωση

Πρόβλημα: Δοθέντες συνάρτηση $f \in C(I)$, $I=[-1,1]$ και ολοκληρώσιμη κατά Riemann συνάρτηση βάρους w θετικής στο I εκτός από πεπερασμένο σύνολο σημείων όπου $w(x)=0$, να βρεθεί πολυώνυμο $q_n^* \in P_n$ τ/ω:

η νόρμα 2 του σφάλματος:

$$\|f - q_n^*\|_2 = \left[\int_{-1}^1 |f - q_n^*|^2 w(x) dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^1 (f - q_n^*)^2 w(x) dx \right]^{1/2} \leq$$

$$\|f - p\|_2 \quad \forall p \in P_n \quad \text{και} \quad \|f - q_n^*\|_2 = \|f - p\|_2 \Leftrightarrow p = q_n^*$$

δ: Διακριτή περίπτωση:

Πρόβλημα: Δοθέντες f στο $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ και συνάρτηση βάρους w , θετικής στο X_m , να βρεθεί πολυώνυμο q_n^* στον P_n τ/ω:

$$\|f - q_n^*\|_2 = \left[\sum_{i=1}^m (f(x_i) - q_n^*(x_i))^2 w(x_i) \right]^{1/2} \leq \|f - p\|_2, \quad \forall p \in P_n$$

$$\text{και} \quad \|f - q_n^*\|_2 = \|f - p\|_2 \Leftrightarrow q_n^* = p.$$

Είχαμε δείξει ότι υπάρχει η προσέγγιση ελαχίστων Τετραγώνων επειδή ο P_n είναι πεπερασμένης διάστασης και είναι μοναδική επειδή η νόρμα $\|\cdot\|_2$ είναι άσνηρα κλειστή.

Ορισμός 1: Έστω $f, g \in C(I)$ και συνάρτηση βάρους w ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των ποσότητας (f, g) όπου
$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx$$

Ορισμός 2: Έστω f, g ορισμένες στον X_m και συνάρτηση βάρους w ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των ποσότητας (f, g) όπου
$$(f, g) = \sum_{i=1}^m f(x_i)g(x_i)w(x_i)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΡΟΝΟΜΕΟΥ:

- 1) $(f, g) = (g, f)$ (ανακλιντικότητα)
- 2) $(\lambda f, g) = (f, \lambda g) = \lambda (f, g)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$ (γραμμικότητα)
- 4) $(f, f) = \|f\|_2^2 \geq 0$ και $\|f\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Σκοπός μας είναι να βρούμε το πολυώνυμο q_n^* . Έτσι, θα επιδιώξουμε να χαρακτηρίσουμε τη βέλτ. ομ. προσέγγιση f ως προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f \in C(I)$ και w μία συνάρτηση βάρους στο σωστό I . Το πολυώνυμο q_n^* είναι προσέγγιση ελαχ. τετραγώνων της f στον P_n αν.ν

$$(f - q_n^*, p) = \int_I (f(x) - q_n^*(x)) p(x) w(x) dx = 0, \forall p \in P_n \quad (1)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Συνάρτησες f, g είναι ορθογώνιες αν.ν $(f, g) = 0$

Απόδειξη:

$\{\Leftarrow\}$: Έστω ότι ισχύει η (1).

Θεωρώ $p \in P_n$

$$\|f - p\|_2^2 = (f - p, f - p) = ((f - q_n^*) + q_n^* - p, (f - q_n^*) + q_n^* - p) =$$

$$= (f - q_n^*, f - q_n^*) + (f - q_n^*, q_n^* - p) + (f - q_n^*, q_n^* - p) + (q_n^* - p, q_n^* - p) =$$

$$= \|f - q_n^*\|_2^2 + 2 \underbrace{(f - q_n^*, q_n^* - p)}_{\in P_n} + \|q_n^* - p\|_2^2 =$$

$$= \|f - q_n^*\|_2^2 + \|q_n^* - p\|_2^2 \geq \|f - q_n^*\|_2^2$$

$$\text{Όπου } \|f - q_n^*\| = \|f - p\| \Rightarrow q_n^* = p$$

$\{\Rightarrow\}$: Έστω q_n^* η βέλτ. (η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων) και ότι δεν ισχύει η σχέση (1)

Διότι $\exists \bar{p} \in P_n$ τέω $(f - q_n^*, \bar{p}) = a \neq 0$

Εστω επίσης ότι το $(\bar{p}, \bar{p}) = b > 0$

Θεωρούμε λοιπόν $\lambda = \frac{a}{b}$ και $q = q_n^* + \lambda \bar{p} \in P_n$

$$\begin{aligned} \|f - q\|_2^2 &= (f - q, f - q) = (f - q_n^* - \lambda \bar{p}, f - q_n^* - \lambda \bar{p}) = \\ &= (f - q_n^*, f - q_n^*) - 2(f - q_n^*, \lambda \bar{p}) + (\lambda \bar{p}, \lambda \bar{p}) = \\ &= \|f - q_n^*\|_2^2 - 2\lambda a + \lambda^2 \|\bar{p}\|_2^2 = \\ &= \|f - q_n^*\|_2^2 - 2\frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{b} = \\ &= \|f - q_n^*\|_2^2 - \frac{a^2}{b} < \|f - q_n^*\|_2^2 \quad \text{Αρα και η } q_n^* \text{ είναι} \\ &\text{βέλτιστη προσέγγιση (ή προσέγγιση ελάχ. τετρ.)} \end{aligned}$$

Θα διατυπώσουμε το ίδιο θεώρημα για τη διαμετρική περίπτωση

Θεώρημα:

Εστω f ορισμένη στο X_n και w συνάρτ. βάρους στο X_n

Το q_n^* είναι η προσέγγιση ελάχ. τετρ. της f στον P_n αν και μόνο αν $(f - q_n^*, p) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - q_n^*(x_i)) p(x_i) \cdot w(x_i) = 0, \forall p \in P_n$

Υπολογισμός της προσέγγισης ελάχιστων τετραγώνων.

Εστω q_n^* η προσέγγιση ή προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων της f στον P_n τότε:

$$(f - q_n^*, p) = 0 \Leftrightarrow (q_n^*, p) = (f, p) \quad \forall p \in P_n \quad (1)$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσω το q_n^* παίρνοντας ως p τα $n+1$ γραμ. ανεξ. πολυώνυμα μιας βάσης του P_n . Θερμάει τη βάση των μονωνόμων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$\text{Εστω } q_n^*(x) = j_0 + j_1 x + j_2 x^2 + \dots + j_n x^n$$

$$\text{Τότε, } (q_n^*, x^i) = (f, x^i) \quad (\text{από την (1)}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (j_0 + j_1 x + j_2 x^2 + \dots + j_n x^n, x^i) = (f, x^i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, x^i) j_0 + (x, x^i) j_1 + (x^2, x^i) j_2 + \dots + (x^n, x^i) j_n = (f, x^i)$$

για $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (γραμ. σύστημα με $n+1$ αγνώστους)

$$\Leftrightarrow A j = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_0 \\ j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha_{ij} = (x^j, x^i) = \int_{-1}^1 x^{i+j} w(x) dx$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$
 και $b_i = (f, x^i) = \int_{-1}^1 f(x) \cdot x^i \cdot w(x) dx$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Αυτό ονομάζεται σύστημα των κανονικών εξισώσεων

όπου στη διακριτή περίπτωση:

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^m x_k^{i+j} \quad \text{και} \quad b_i = \sum_{k=1}^m f(x_k) \cdot x_k^i$$

Παρατήρηση:

(αυτοδιαγώνιος)

Ο πίνακας A των κανονικών εξισώσεων έχει τα ίδια στοιχεία κατά μήκος των διαγώνιων από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά. Αυτοί οι πίνακες λέγονται Hankel.

Οι πίνακες Hankel έχουν πολύ κακή κατάσταση (δηλ. ο δείκτης κατάστασης του πίνακα είναι πολύ μεγάλος) που σημαίνει ότι μικρά σφάλματα κατά τις υπολογιστικές επιμέτρων μεταβάλλονται στο αποτέλεσμα. Επομένως, η εύρεση του q_n^* με το σύστημα κανονικών εξισώσεων δεν είναι αξιόπιστα, ειδικά για μεγάλα n . (για $n \geq 7$ όχι αξιόπιστα)

Άσκηση 1

Έστω $f_1, f_2 \in C[a, b]$ ορθογώνιες. Να αποδείξετε ότι $\|f_1 + f_2\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2$. (Πυθαγόρειο-Λεωρήμα)

Λύση

$$\|f_1 + f_2\|_2^2 = (f_1 + f_2, f_1 + f_2) = \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 + 2(f_1, f_2) = \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2$$

Άσκηση 2

Έστω $q_1, q_2 \in C[a, b]$ τ/ω $\|q_1\|_2 = \|q_2\|_2 = 1$

Να αποδείξετε ότι:

$q_1 + q_2$ και $q_1 - q_2$ είναι ορθογώνιες. (Ιδιότητες διαγώνιων πόλων)

Λύση

$$(q_1 + q_2, q_1 - q_2) = \|q_1\|_2^2 - \|q_2\|_2^2 = 1 - 1 = 0$$

όπου $q_1 \neq q_2$ και $q_1 \neq -q_2$ αλλιώς θα ίσχυε τετριμμένα

Ασκηση 3:

Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της $f(x) = x^3$ ορισμένης στο $[0,1]$ στον $P_2 = \{x^2, x, 1\}$

ΛΥΣΗ

$$x = \frac{b-g}{2}t + \frac{b+g}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$g(t) = f(x(t)) = \frac{1}{8}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \quad t \in [-1,1]$$

$$\alpha_{00} = \int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 2, \quad \alpha_{01} = \alpha_{10} \text{ (όχι Hankel)}$$

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} = \int_{-1}^1 t dt = 0, \quad \alpha_{02} = \alpha_{11} = \alpha_{20} \text{ (όχι Hankel)}$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{11} = \alpha_{20} = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$$

$$\alpha_{22} = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$$

Βρίσκουμε τον πίνακα Hankel

Τώρα θα βρούμε τον b

$$b_0 = (g(t), 1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{t^4}{4} + t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t \right]_{-1}^1 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = (g(t), t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(t^4 + 3t^3 + 3t^2 + t) dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{t^5}{5} + \frac{3}{4}t^4 + t^3 + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{5} + 2 \right) = \frac{3}{10}$$

$$b_2 = (g(t), t^2) = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(t^5 + 3t^4 + 3t^3 + t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{t^6}{6} + \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{8} \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{30}$$

Το σύστημα κανονικών εξισώσεων είναι

$$\begin{cases} 2j_0 + 0j_1 + \frac{2}{3}j_2 = \frac{1}{2} \\ 0j_0 + \frac{2}{3}j_1 + 0j_2 = \frac{3}{10} \\ \frac{2}{3}j_0 + 0j_1 + \frac{2}{3}j_2 = \frac{7}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j_1 = \frac{9}{20} \\ j_2 = \frac{3}{8} \\ j_0 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$q_2^*(t) = \frac{1}{8} + \frac{9}{20}t + \frac{3}{8}t^2$$

$$\text{άλλα } x = \frac{1}{2}(t+1) \Leftrightarrow \boxed{t = 2x-1}$$

$$\text{Άρα, } q_2^*(t(x)) = p_2^*(x) = \frac{1}{8} + \frac{9}{20}(2x-1) + \frac{3}{8}(2x-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{20} + \frac{9}{10}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}$$